Квантовая механика. Физический факультет, 4 курс, 7 семестр.

Занятие №11. ***Движение в центральном поле: сферические волны, частица в сферически симметричной прямоугольной яме конечной глубины***

1. Проверка д/з.

<u>Задача 1.</u> Найти $\left\langle r^{-1}\right\rangle$ в состоянии, описываемом волновой функцией $\psi(r,\theta,\varphi)=Ae^{-r}$. Чему равняются в этом состоянии $\left\langle \hat{\vec{L}}^2\right\rangle$ и $\left\langle \hat{L}_z\right\rangle$?

2. Гамильтониан частицы, которая движется в центральном поле

$$\hat{H}=-\frac{\hbar^2}{2\mu}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\Delta_{\theta\varphi}\right]+U(r)=-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{\hbar^2\hat{\vec{l}}^2}{2\mu r^2}+U(r);$$

$$\Delta_{\theta\varphi}=\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]=-\hat{\vec{l}}^2.$$

<u>Задача 2.</u> Исследовать стационарные состояния свободной частицы с определенной энергией, определенным моментом l и его проекцией m (сферические волны). (см. ЛЛ § 33)

Коммутационные соотношения для $\hat{H},\hat{\vec{l}}^2,\hat{l}_z$:

$$\left[\hat{H},\hat{\vec{l}}^2\right]=0,\quad \left[\hat{H},\hat{l}_z\right]=0,\quad \left[\hat{\vec{l}}^2,\hat{l}_z\right]=0.$$

Разделение переменных: $\psi(\vec{r})=\psi(r,\theta,\varphi)=R(r)Y_{lm}(\theta,\varphi).$

Уравнение для радиальной части волновой функции $R(r)$ при $U(r)=0$

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2}R(r)=ER(r).$$

Важные соотношения: $\dfrac{1}{r^2}\dfrac{d}{dr}\left(r^2\dfrac{dR}{dr}\right)=\dfrac{1}{r}\dfrac{d^2}{dr^2}(rR)=\dfrac{d^2R}{dr^2}+\dfrac{2}{r}\dfrac{dR}{dr}$

Замена:

$$R(r)=\frac{\chi(r)}{\sqrt{r}};\quad R'(r)=\frac{\chi'(r)}{\sqrt{r}}-\frac{1}{2}\frac{\chi(r)}{r\sqrt{r}};\quad R''(r)=\frac{\chi''(r)}{\sqrt{r}}-\frac{\chi'(r)}{r\sqrt{r}}+\frac{3}{4}\frac{\chi(r)}{r^2\sqrt{r}}.$$

Решение: $\psi_{klm}(r) = \sqrt{\dfrac{2\pi k}{r}} J_{l+1/2}(kr) Y_{lm}(\theta,\varphi); \quad E_k = \dfrac{\hbar^2 k^2}{2\mu}.$

$J_{l+1/2}(kr)$ – функции Бесселя полуцелого аргумента, $Y_{lm}(\theta,\varphi)$ – сферические функции.

Задача 3. Определить уровни энергии для движения частицы в поле сферически симметричной прямоугольной яме конечной глубины

$$U(r) = \begin{cases} -U_0, \, r < a; \\ 0, \quad r > a. \end{cases}$$

Рассмотреть сначала случай $l = 0$ (ЛЛ § 33(1)), а затем, $l \neq 0$ (Флюгге З. Задачи по квантовой механике. Т.1. стр. 168, задача 63).

3. Самостоятельная работа (~ 20 минут). Работа состоит их двух заданий, максимальная оценка – **5 баллов**

Домашнее задание ЛЛ § 36(1,2)

ГКК - Галицкий Е.М., Карнаков Б.М., Коган В.И. Задачи по квантовой механике, 1981; ЛЛ – Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика

Доп.лит: Флюгге З. Задачи по квантовой механике. Т.1, Т.2. 1974